Barem de notare – clasa a XII-a

Problema 1. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \Big/ a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Demonstraţi că $(M, +, \cdot)$ este inel comutativ cu divizori ai lui zero;
b) Determinaţi unităţile inelului;
c) Daţi exemplu de element nenul din M care nu este nici inversabil, nici divizor al lui zero.

Soluție și barem:

a) Verificarea axiomelor inelului......................................**3p**

Indicarea unei perechi de divizori ai lui zero sau determinarea divizorilor **1p**

b) A element inversabil$\Rightarrow detA = \pm 1$; $U(M) = \{\pm I_3, \pm X, \pm X^2\}$, $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$...**2p**

c) Orice exemplu bun, cu justificare...**1p**

Problema 2. a) Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu elementul neutru e şi fie $a \in G$ şi $b \in G$ astfel încât

$a \cdot b = b \cdot a^3$ şi $b \cdot a = a \cdot b^3$. Dacă G are ordin impar, demonstraţi că $a = b = e$.

b) Demonstraţi că numărul elementelor de ordin impar din orice grup finit este impar.

Gazeta matematică

Soluție și barem:

a) $ab = baa^2 = ab^3a^2 \Rightarrow e = b^2a^2 \Rightarrow ba = abb^2 = ba^3a^2 \Rightarrow a^4 = e$
(1p) **(1p)**

$ord(G)$ impar$\Rightarrow ord(a)$ impar, deci $a = e$. Din $b^2 = e$ şi $ord(b)$ impar rezultă $b = e$.

(1p) **(1p)**

b) $ord(x)$ impar$\Leftrightarrow ord(x^{-1})$impar................. **(1p)**
Singurul element de ordin impar ce coincide cu inversul său este elementul neutru. **(1p)**
Finalizarea.............. **(1p)**

Problema 3. . a) Calculaţi $\int \sin \ln x \, dx$, $x \in (0, \infty)$.

b) Calculaţi $\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\sin 2x+\cos 2x} dx$.

Soluție și barem:

a) Prima integrare prin părţi.................... **(2p)**
A doua integrare prin părţi...................**(1p)**
Mulţimea primitivelor..........................**(1p)**

b) O primitivă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ a funcţiei de integrat are formula $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{1+tgx}{\sqrt{2}}$ .... **(1p)**

O primitiva pe $[0, \pi]$ este $G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{1+tgx}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{1+tgx}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$ ....**(1p)**

Valoarea integralei este $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$..................**(1p)**

Problema 4. Demonstraţi că nu există $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care să admită o primitivă $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât:

$$F\big(f(x)\big) = x, \forall\, x \in \mathbb{R} .$$

Soluție și barem:

Presupunem că există o funcţie care să îndeplinească toate condiţiile date.

$Fof = 1_{\mathbb{R}} \Longrightarrow f$ $injectiv$ă și F $surjectiv$ă .... **(1p)**

$f\ a.p. \Rightarrow f$ $are\ proprietatea\ lui\ Darboux$ .... **(1p)**

f $injectiv$ă și $cu\ proprietatea\ lui\ Darboux \Rightarrow f\ s.m.$ .... **(1p)**

Dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(a) = 0$, atunci a este punct de extrem global pentru F şi se contrazice surjectivitatea lui F .... **(2p)**

Dacă f nu se anulează, atunci f are semn constant şi F devine injectivă...... **(1p)**

F bijectivă$\Longrightarrow f = F^{-1} \Longrightarrow f$ $surjectiv$ă şi se contrazice faptul că f are semn constant.....**(1p)**

Barem de notare – clasa a IX-a

Problema 1. Fie A = $a\sqrt{2}+a\cdot b-b\sqrt{2}-2$.

a). Arătaţi că dacă A = 0 şi $b\in\mathbf{Q}$, atunci $a\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$.

b). Arătaţi că dacă A = 2 şi a , $b\in\mathbf{Q}$, atunci $|a|=|b|=A$.

Problema 1 barem	**a)** A = (a - $\sqrt{2}$) · (b + $\sqrt{2}$) A = (a - $\sqrt{2}$) · (b + $\sqrt{2}$) şi $b\in\mathbf{Q}\Rightarrow a=\sqrt{2}\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ **b)** A =2$\Rightarrow$ $(a-b)\cdot\sqrt{2}+a\cdot b-4=0$ Cum a , $b\in\mathbf{Q}\Rightarrow$a=b $\Rightarrow a^2-4=0\Rightarrow a=2$ sau a = $-2\Rightarrow|a|=|b|=A$.	**2puncte** **2puncte** **1punct** **1punct** **1punct**

Problema 2. Numerele $x,y,z\in(0,\infty)$ verifică $xyz=xy+yz+zx$. Să se demonstreze că

$$\frac{xy}{z(1+xy)}+\frac{yz}{x(1+yz)}+\frac{zx}{y(1+zx)}\geq\frac{9}{10}$$

Problema 2 barem	$x,y,z\in(0,\infty)$ $și$ $xyz=xy+yz+zx\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a+b+c=1, unde\ a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}$ $a+b+c\geq3\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow3abc\leq\frac{1}{9}\Leftrightarrow\frac{1}{1+3abc}\geq\frac{9}{10}\ (*)$ $\frac{xy}{z(1+xy)}+\frac{yz}{x(1+yz)}+\frac{zx}{y(1+zx)}\geq\frac{9}{10}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\frac{c}{1+ab}+\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}=\frac{c^2}{c+abc}+\frac{a^2}{a+abc}+\frac{b^2}{b+abc}\geq^{T.A}$ $\geq\frac{(\mathrm{a+b+c})^2}{\mathrm{abc+3abc}}=\frac{1}{1+3\mathrm{abc}}\geq^{*}\frac{9}{10}$	 **1p** **3p** **2p** **1p**

Problema 3. Fie M, N, P mijloacele laturilor $[AB], [AC]$ şi, respectiv $[BC]$ ale triunghiului ABC, iar D este ortocentrul triunghiului MNP.

a) Să se arate că $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DP}$.

b) Dacă E este centrul de greutate al triunghiului MNP şi F este ortocentrul triunghiului ABC, atunci să se demonstreze că punctele D, E, F sunt coliniare.

Problema 3 barem	**a)** AMPN paralelogram $\Rightarrow \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DP}$	**2p**
	b) $E\ centrul\ de\ greutate\ al\ triunghiului\ MNP \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EP} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \vec{0} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow E\ este\ centrul\ de\ greutate\ al\ \Delta\ ABC\ (1)$	**2p**
	$MD \perp NP\ şi\ NP \parallel AB \Rightarrow MD \perp AB$ $MD \perp AB$ şi AM=BM⇒ DM este mediatoarea laturii AB. Analog, ND este mediatoarea laturii AC $\Rightarrow D$ este centrul cercului circumscris $\Delta\ ABC(2)$	**2p**
	Dreapta lui Euler (pentru$\Delta\ ABC$) conţine punctele D,E,F	**1p**

Problema 4. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n = \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1}}{(n+2)(n+3)}$.

a) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

b) Să se demonstreze că suma primilor 2017 termeni ai şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ este mai mare decât 2016.

Problema 4 barem	**a)** $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1 =$ $= (n^2+5n+4)(n^2+5n+6) = t(t+2)+1 = (t+1)^2 =$ $= (n^2+5n+5)^2$	**2p**
	$a_n = \dfrac{n^2+5n+5}{n^2+5n+6} = 1 - \dfrac{1}{n^2+5n+6} < 1 \Rightarrow 0 < a_n < 1 \Rightarrow$	**1p**
	$\Rightarrow a_n este$ mărginit	**1p**
	b) $a_n = 1 - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_{2017} =$	**2p**
	$=2017 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2020} > 2016.$	**1p**

Barem de notare – clasa a XI-a

Problema 1. a) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{\ln\frac{ne}{n+1}}-1\right)$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[x]+[2^3x]+[3^3x]+...+[n^3x]}{C_{n+5}^4}$, $n\in\mathbb{N}^*, x\in\mathbb{R}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Soluție și barem:

1. a) $l=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{\ln\frac{ne}{n+1}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{\ln\frac{ne}{n+1}-1}{\sqrt{\ln\frac{ne}{n+1}}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{ne}{n+1}}+1}n\left(\ln\frac{ne}{n+1}-1\right)$ ……..**0,5p**

$l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{ne}{n+1}}+1}n\left(\ln\frac{ne}{n+1}-\ln e\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{ne}{n+1}}+1}n\left(\ln\frac{n}{n+1}\right)$ ……………………… **1p**

$l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{ne}{n+1}}+1}\ln\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{ne}{n+1}}+1}\ln\left[\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}\right]^{\frac{-n}{n+1}}$ ………………….**1p**

Finalizare $l=-\frac{1}{2}$ ……………………………………………………………………….**0,5p**

b) $k^3x-1<[k^3x]\le k^3x$, pentru orice $k=\overline{1,n}$ ………………………………………………….**1p**

prin însumare obţinem $\frac{n^2(n+1)^2}{4}x-n<\sum\limits_{k=1}^{n}[k^3x]\le\frac{n^2(n+1)^2}{4}x$ …………………………….**1p**

$C_{n+5}^4=\frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}{24}$ ………………………………………………………….**1p**

Aplicând criteriul cleştelui se obţine $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[x]+[2^3x]+[3^3x]+...+[n^3x]}{C_{n+5}^4}=6x$ ………………...**1p**

Problema 2. Fie $n \geq 2$ un număr natural şi $A \in M_n(\mathbb{R})$, astfel încât $A^6 = A^3$. Să se arate că, dacă $A^3 + B = I_n$, atunci :

a) $AB = BA$;

b) matricea $I_n + AB + A^2B^2$ este inversabilă.

Soluție și barem:

a) Din $A^3 + B = I_n$, obținem $A^4 + AB = A$ și $A^4 + BA = A$, deci $AB = BA$ ……………..**2p**

b) $(AB)^3 = A^3B^3 = A^3BB^2 = A^3(I_n - A^3)B^2 = (A^6 - A^3)B^2 = O_n$ ………………………..…**3p**

$I_n - (AB)^3 = (I_n - AB)\left(I_n + AB + (AB)^2\right) \overset{AB=BA}{=} (I_n - AB)(I_n + AB + A^2B^2)$………...……..**1p**

$I_n = (I_n - AB)(I_n + AB + A^2B^2)$,

de unde deducem că matricea $I_n + AB + A^2B^2$ este inversabilă……………..…………..……**1p**

Problema 3. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Să se determine toate matricele $A \in M_n(\mathbb{C})$ cu $A^{2017} = -I_n$, pentru care există $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ care comută şi verifică $X + Y = I_n$, $AX = X^2$ şi $AY = -Y^2$.

Gazeta matematică

Soluție și barem:

$XY = YX$ (1) $\qquad X + Y = I_n$ (2) $\qquad AX = X^2$ (3) $\qquad AY = -Y^2$ (4)

Din relaţiile (2) şi (3) rezultă $A(X + Y) = X^2 - Y^2$, dar $XY = YX$, deci $A(X + Y) = (X - Y)(X + Y)$. Cum $X + Y = I_n$, avem $A = X - Y$ (5)………………………..**2p**

Din (4) şi (5) avem $(X - Y)Y = -Y^2$, de unde rezultă că $XY = O_n$ ……………**1p**

$(X + Y)^2 = I_n \overset{XY=O_n=YX}{\Rightarrow} X^2 + Y^2 = I_n \overset{(3)(4)}{\Rightarrow} AX - AY = I_n \Rightarrow A(X - Y) = I_n \overset{(5)}{\Rightarrow} A^2 = I_n$ …………..…..**2p**

$A^{2017} = (A^2)^{1008} \cdot A = A$ ………………………………………………………………………..…**1p**

Dar $A^{2017} = -I_n$, deci $A = -I_n$ ……………………………………………………………..….**1p**

Problema 4. Se consideră şirul $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$ definit prin, $a_0=1, a_1=2$ şi $a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+2a_{n-1}}$, $\forall n\geq 1$ Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}, n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție și barem:

Se arată prin inducţie matematică $a_n\geq 1, \forall n\in\mathbb{N}$ ……………………………………………**0,5p**

Se observă că $\sqrt{a_n^2+2a_{n-1}}>a_n$, $\forall n\geq 1$,

deci $a_{n+1}>a_n$, $\forall n\geq 0$, adică şirul $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$ este strict crescător…………………………………**0,5p**

Din relaţia de recurenţă obţinem $a_{k+1}^2-a_k^2=2a_{k-1}$, pentru $\forall k\geq 1$,de unde rezultă

$a_{k+1}^2-a_k^2\geq 2$, $\forall k\geq 1$……………………………………………………………………....**1p**

Prin însumare după k avem $a_n^2\geq 2\left(n-1\right)+a_1^2$, adică $a_n\geq\sqrt{2n+2}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$…………**1p**

Se arată că $a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+2a_{n-1}}<\sqrt{a_n^2+2a_n}<\sqrt{a_n^2+2a_n+1}=a_n+1$…………………………….**1p**

dar $a_{n+1}>a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ şi din $1<\frac{a_{n+1}}{a_n}<1+\frac{1}{a_n}$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$…………………………….…**1p**

Deoarece $a_{n+1}^2-a_n^2=2a_{n-1}$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{\left(n+1\right)-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2a_{n-1}}{a_{n+1}+a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{a_{n-1}}{a_n}}{\frac{a_{n+1}}{a_n}+1}=1$…………….....**1p**

Folosind lema Stolz-Cesaro obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$…………………………………….………..**1p**

Barem de notare – clasa a X-a

Problema 1. Fie $f: R \to R$ o funcție cu proprietatea $f\left(f(x)\right) = x^2 - x + 1, (\forall)x \in R$.

Să se arate că : a) $f(1) = 1$;

b) funcția $h: R \to R, h(x) = x^3 - xf(x) + 1$ nu este injectivă.

Soluție și barem:

1) a) $f\left(f(x)\right) = x^2 - x + 1, (\forall)x \in R \xrightarrow{pentru\ \ x=1} f\left(f(1)\right) = 1 \overset{2p}{\Rightarrow} f\left(f\left(f(1)\right)\right) = f(1) \overset{1p}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{1p}{\Leftrightarrow} f(1)^2 - f(1) + 1 = f(1) \overset{1p}{\Leftrightarrow} f(1) = 1.$$

b) $h(1) = 1 - 1 + 1 = 1, h(0) = 1 \overset{2p}{\Rightarrow} h$ nu este funcție injectivă

Problema 2. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt[3]{7 + 2x - x^2} - 1 = \frac{3x^2 - 1}{\sqrt{12x^2 - 8}}$$

Soluție și barem:

$$12x^2 - 8 > 0 \overset{1,5p}{\Longleftrightarrow} x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$$

$$\frac{3x^2 - 1}{\sqrt{12x^2 - 8}} = \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{3x^2 - 2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3x^2 - 2} + \frac{1}{\sqrt{3x^2 - 2}}\right) \geq 1(2,5p)$$

$$\sqrt[3]{7 + 2x - x^2} - 1 \geq 1 \overset{1p}{\Leftrightarrow} \sqrt[3]{7 + 2x - x^2} \geq 2 \underset{1p}{\Leftrightarrow} -1 + 2x - x^2 \geq 0 \overset{1p}{\Leftrightarrow} x = 1.$$

Problema 3. Fie a, b, c numere reale pozitive cu $abc = a + b + c + 2$. Să se arate că

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$$

Gazeta matematică

Soluție și barem:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \overset{1p}{\Leftrightarrow} \frac{abc-2}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \overset{1p}{\Leftrightarrow} abc - 3\sqrt[3]{abc} - 2 \geq 0$$
$$\overset{1p}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt[3]{abc}-2\right)\left(\sqrt[3]{abc}+1\right)^2 \geq 0 \overset{1p}{\Leftrightarrow} \sqrt[3]{abc} - 2 \geq 0 \overset{1p}{\Leftrightarrow} \sqrt[3]{abc} \geq 2.$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c}} \overset{0,5p}{\Longleftrightarrow} \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}}{2} \geq \frac{\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ac}}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\overset{0,5p}{\Longleftrightarrow} \frac{\sqrt[3]{abc}}{2} \geq \frac{\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ac}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}}$$

adevărată pentru că

$$\frac{\sqrt[3]{abc}}{2} \geq 1$$

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2} \geq \sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ac} \overset{1p}{\Leftrightarrow} \frac{\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ac}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}} \leq 1$$

Problema 4. Fie $a \in R$. Dacă $z \in C\setminus R$ verifică egalitatea $z^n + nz + a = 0$, unde $n \in N^*$, arătați că $|z| \geq 1$.

Soluție și barem:

$$z^n + nz + a = 0 \overset{1p}{\Rightarrow} \bar{z}^n + n\bar{z} + a = 0 \overset{1p}{\Rightarrow} z^n - \bar{z}^n = -n(z-\bar{z})$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{1p}{\Leftrightarrow} (z-\bar{z})(z^{n-1}+z^{n-2}\bar{z}+\cdots+\bar{z}^{n-1}) = -n(z-\bar{z}) \\ z \in C\setminus R \overset{1p}{\Rightarrow} z - \bar{z} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$-n = (z^{n-1}+z^{n-2}\bar{z}+\cdots+\bar{z}^{n-1}) \overset{1p}{\Rightarrow} n = |(z^{n-1}+z^{n-2}\bar{z}+\cdots+\bar{z}^{n-1})| \leq$$
$$\leq |z^{n-1}| + |z^{n-2}\bar{z}| + \cdots + |(\bar{z})^{n-1}| \overset{1p}{\Leftrightarrow} n \leq n|z|^{n-1} \overset{1p}{\Rightarrow} 1 \leq |z|.$$